ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (37)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: ΔΕΥΤΕΡΑ, 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

8:00π.μ. – 11:00 π.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο το οποίο αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K(1,1)$, αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο $\Sigma(1,6)$ προς τον κύκλο είναι ίσο με 4 μονάδες.

Α2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx$$

Α3. Να χαρακτηρίσετε τον πιο κάτω ισχυρισμό ως **ΟΡΘΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα $\Delta \subset \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ»

Α4. Δίνεται η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει ότι το σημείο $A(0,1)$ ανήκει στη γραφική της παράσταση. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f, αν η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης έχει κλίση:

$$\lambda(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Α5. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \tau o\xi\eta\mu t\, dt}{\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Α6. Θεωρούμε το χωρίο που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και περικλείεται από τη γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x)=(x+2)^2,$$

την ευθεία $y=9$ και τον άξονα των τεταγμένων. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του πιο πάνω χωρίου

(μονάδες 2)

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του πιο πάνω χωρίου γύρω από τον άξονα των τεταγμένων.

(μονάδες 3)

Α7. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει:

$$f''(x)=f(x)\qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$\int f(x)\eta\mu x\, dx=\frac{f'(x)\eta\mu x-f(x)\sigma\upsilon\nu x}{2}+c,\qquad c\in\mathbb{R}$$

(μονάδες 3)

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\eta\mu x\, dx$$

(μονάδες 2)

Α8. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Α9. Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

(α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g: [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$g(x) = f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - a)$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

(μονάδες 3)

(β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

(μονάδες 2)

Α10. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{και} \quad g(x) = x - \eta\mu x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση g ως προς τα ακρότατα.

(μονάδες 1,5)

(β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

(μονάδες 1)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(0, f(0))$ και $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **(μονάδες 1)**

(δ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι: **(μονάδες 1,5)**

$$\frac{2x}{\pi} \leq \eta\mu x \leq x, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^2$ και P τυχαίο σημείο του. Από το σημείο P φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων, η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο N. Έστω Σ σημείο πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα PN τέτοιο ώστε:

$$\frac{\Sigma N}{PN}=\frac{\beta}{\alpha} \text{ όπου } 0<\beta<\alpha,\ \alpha,\beta\epsilon\mathbb{R}$$

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ καθώς το P κινείται πάνω στον κύκλο είναι η

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

(μονάδες 5)

(β) Δίνεται το σύστημα των ανισώσεων:

$$\begin{cases} x^2+y^2\le\alpha^2 \\ \dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}\ge 1,\ \ 0<\beta<\alpha \end{cases}$$

Το χωρίο που περιγράφεται από το πιο πάνω σύστημα περιστρέφεται κατά π ακτίνια γύρω από των άξονα των τετμημένων. Να αποδείξετε ότι ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι ίσος με

$$V=\frac{4}{3}\pi\alpha(\alpha^2-\beta^2)\ \kappa.\mu.$$

(μονάδες 5)

Β2. Σε ένα Λύκειο επτά (7) τελειόφοιτοι μαθητές/τριες ενοικίασαν τέσσερα (4) διθέσια μηχανάκια.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν στα μηχανάκια οι επτά τελειόφοιτοι, αν:

i. σε κάθε θέση οδηγού πρέπει απαραίτητα να υπάρχει μαθητής/τρια
ii. η Αργυρώ και ο Δημήτρης ξέχασαν να φέρουν το δίπλωμα οδήγησής τους, άρα δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού.

(μονάδες 6)

(β) Δεδομένου ότι η Αργυρώ και ο Δημήτρης δεν μπορούν να καθίσουν σε θέση οδηγού, να βρείτε την πιθανότητα η Γεωργία και ο Μάριος να καθίσουν στο ίδιο μηχανάκι. **(μονάδες 4)**

Β3. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4\alpha x,\ \alpha > 0$. Παίρνουμε σημεία Γ και Δ πάνω στη διευθετούσα της, με $y_\Gamma > 0$, έτσι ώστε η γωνία $\Gamma E \Delta$ να είναι ορθή, όπου E η εστία της παραβολής. Από τα Γ και Δ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της παραβολής, οι οποίες τέμνουν την παραβολή στα σημεία $A(\alpha t^2, 2\alpha t)$ και $B(\alpha\rho^2, 2\alpha\rho)$, αντίστοιχα.

(α) Να αποδείξετε ότι η AB είναι εστιακή χορδή. **(μονάδες 4)**

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A έτσι ώστε το τραπέζιο $AB\Delta\Gamma$ να έχει ελάχιστο εμβαδόν. (Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\upsilon}{2}$)

(μονάδες 6)

Β4. Το 15% του ανθρώπινου πληθυσμού έχει ψηλό δείκτη νοημοσύνης (I.Q.).

(α) Επιλέγουμε στην τύχη 10 άτομα από αυτόν τον πληθυσμό. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των πιο κάτω ενδεχομένων:

Α: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν ακριβώς 4 με ψηλό I.Q.»
Β: «Ανάμεσα στα 10 άτομα υπάρχουν τουλάχιστον 2 με ψηλό I.Q.»
(μονάδες 7)

(β) Να βρείτε το ελάχιστο πλήθος ατόμων που πρέπει να επιλέξουμε τυχαία από τον πληθυσμό αυτό, ώστε η πιθανότητα να υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο με ψηλό I.Q. να είναι μεγαλύτερη του 90%. **(μονάδες 3)**

Β5. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα πιο κάτω:

i. Είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$

ii. $f(-2) = -4\sqrt{e}, \quad f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}}, \quad f(1) = -\frac{1}{e}, \quad f(2) = 0$

iii. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

iv. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

v. $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

vi. $\lim\limits_{x\to -\infty} [f(x) - (x-3)] = 0$

Δίνεται επίσης ο πίνακας προσήμων των συναρτήσεων $f,\ f'$ και f''

x	$-\infty$		-2		0		$\frac{2}{5}$		1		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$-$	$\parallel$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ